MINISTERE DU REDEPLOIEMENT INDUSTRIEL
ET DU COMMERCE EXTERIEUR

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE
DES TECHNIQUES INDUSTRIELLES
ET DES MINES D'ALES

CONCOURS D'ADMISSION 1985

EPREUVES ECRITES D'ADMISSIBILITE

M A T H E M A T I Q U E S

(Temps accordé : 4 heures)

Les candidats doivent traiter les problèmes I et II qui sont indépendants.

Ces problèmes seront rédigés sur des feuilles de composition séparées :

- *feuille rose pour le problème I*
- *feuille bleue pour le problème II*

Les candidats doivent vérifier que les deux problèmes s'étendent sur 6 pages (y compris celle-ci).

NB : Les copies illisibles ou mal présentées sont corrigées aux risques et périls du candidat.

Les règles à calcul, tables de logarithmes et tables trigonométriques sans formulaires, ainsi que les calculatrices électroniques portatives autonomes non imprimantes sont autorisées.

Toutes autres documentations sont interdites.

PROBLEME I

On considère la suite des fonctions polynômes P_n, définies sur $\mathbb{R}$, pour tout entier naturel n, vérifiant les relations (I) :

$$(I)\quad \begin{cases} P_0(x) = 1 & , P_1(x) = x - \frac{1}{2} \\ P'_n(x) = P_{n-1}(x) & \text{pour } n \geq 1 \\ P_n(1) = P_n(0) & \text{pour } n > 1 \end{cases}$$

A) 1) Montrer que :

$$P_2(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}$$

$$P_3(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{12}x$$

2) Déterminer $P_4(x)$.

On admettra que l'on peut déterminer ainsi les fonctions polynômes P_n pour toute valeur de n.

B) Soit Q_n la fonction telle que :

$$Q_n(t) = P_n\left(t + \frac{1}{2}\right)$$

1) Ecrire les relations (I)' équivalentes à (I) vérifiées par Q_n.

2) Démontrer par récurrence que Q_{2p-1} est une fonction impaire.

3) Calculer pour $p > 1$:

a) $Q_{2p-1}(t)$ quand $t \in \{ -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2} \}$

b) $P_{2p-1}(x)$ quand $x \in \{ 0, \frac{1}{2}, 1 \}$

C) Dans toute cette partie $x \in [0,1]$

1) Etudier les variations de P_3 pour $x \in [0,1]$ et tracer sa courbe représentative.

2) On suppose que, p étant supérieur ou égal à 1, pour :

$$x \in \left]0, \frac{1}{2}\right[, P_{4p-1}(x) > 0$$

$$x \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[, P_{4p-1}(x) < 0$$

Démontrer que dans ces conditions $P_{4p}(x)$ admet sur $]0,1[$ deux zéros réels et deux seulement (on pourra envisager les signes respectifs possibles de $P_{4p}\left(\frac{1}{2}\right)$ et de $P_{4p}(0)$).

En déduire l'allure de la courbe représentative de P_{4p}.

3) Déduire successivement de la question précédente sous les mêmes hypothèses :

a) le signe de $P_{4p}(x)$ et les variations de P_{4p+1}

b) le signe de $P_{4p+1}(x)$ et les variations de P_{4p+2}

c) que P_{4p+2} admet sur $]0,1[$ deux zéros et deux seulement

d) le signe de $P_{4p+2}(x)$, les variations de P_{4p+3} et le signe de $P_{4p+3}(x)$.

On présentera ces résultats sous forme de tableaux.

4) Montrer que l'hypothèse faite en (2) est vraie pour toute valeur de p, $p > 1$ et indiquer sous forme de schémas les différentes allures que peuvent présenter les courbes représentatives des fonctions P_n selon les valeurs de n.

D) On pose : $B_n = n ! P_n(0)$

1) Calculer les réels : B_1, B_2, B_3.

Exprimer P_1, P_2, P_3 à l'aide de ces réels et vérifier que dans chaque cas on peut écrire symboliquement :

$$P_n(x) = \frac{1}{n!}(x+B)^n \text{ avec } B^k = B_k,\ k \in \{1, 2, 3\}$$

2) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P_n(x) = \frac{1}{n!}(x+B)^n$ avec $B^k = B_k$, $k \in \mathbb{N}$.

En déduire la relation de récurrence : $(1+B)^n = B_n$.

3) Retrouver en utilisant les résultats précédents, l'expression de $P_4(x)$ trouvée en (A, 2).

PROBLEME II

On désigne par E l'espace vectoriel réel des suites réelles et par F l'ensemble des suites f de E qui vérifient :

$\forall n \in \mathbb{N}$; $f(n+5) = 7.f(n+4) - 14.f(n+3) + 2.f(n+2) + 15.f(n+1) - 9.f(n)$

1) Montrer que F est un sous espace vectoriel de E.

2) Soit $g : F \longrightarrow \mathbb{R}^5$ l'application définie par :
$g(f) = (f(0), f(1), f(2), f(3), f(4))$

Montrer que g définit un isomorphisme de F dans $\mathbb{R}^5$. En déduire la dimension de F.

3) Pour tout entier i élément de {0, 1, 2, 3, 4} on désigne par e_i l'unique élément de F tel que : $e_i(j) = 1$ pour $j = i$
$e_i(j) = 0$ pour $j \neq i$; $j \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$

a) Vérifier que $(g(e_0), g(e_1), g(e_2), g(e_3), g(e_4))$ est une base de $\mathbb{R}^5$.
En déduire que $(e_0, e_1, e_2, e_3, e_4)$ est une base de F notée $(e_i)_{0 \leq i \leq 4}$.

b) Donner les coordonnées de f, élément quelconque de F, dans cette base.

4) On considère l'application u de F dans E définie pour tout élément f de F et tout entier naturel n par : $[u (f)] (n) = f (n + 1)$

a) Montrer que u est un endomorphisme de F.

b) Déterminer la matrice U de u par rapport à la base $(e_i)_{0 \leq i \leq 4}$.

5) On pose P(k) = det (U - kI) où I est la matrice unité et k un nombre réel.

Montrer que l'équation P(k) = 0 admet trois racines réelles k_0, k_1, k_2 telles que : $k_0 < k_1 < k_2$

6) a) Montrer que toute suite définie par : $f(n) = k_i^n$ est un élément de F pour $i \in \{0, 1, 2\}$.

b) Montrer que toute suite définie par : $f(n) = n k_i^n$ est un élément de F pour $i \in \{1, 2\}$.

7) Soit s_0 ; s_1 ; s_2 ; s_3 ; s_4 les suites de F définies par :

$s_0(n) = k_0^n$; $s_1(n) = k_1^n$; $s_2(n) = k_2^n$; $s_3(n) = n k_1^n$; $s_4(n) = n k_2^n$.

a) Donner les coordonnées de ces suites dans la base $(e_i)_{0 \leq i \leq 4}$

b) Montrer que $(s_0, s_1, s_2, s_3, s_4)$ est une base de F.

c) Donner la forme générale des suites de F en écrivant :
pour tout entier naturel n : $f(n) = a_0 k_0^n + a_1 k_1^n + a_2 k_2^n + a_3 n k_1^n + a_4 n k_2^n$
et déterminer les réels a_0, a_1, a_2, a_3 et a_4 tels que :
$f(0) = 0$; $f(1) = -10$; $f(2) = -16$; $f(3) = -30$; $f(4) = 0$.
